21. Seja $f: R - \{0\} \to R$ a função definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Sobre as características e as propriedades da função f, é possível afirmar:

I. A imagem da função f é o conjunto é o $R - \{0\}$

II. A reta cuja equação, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonal usual, é $x + y = 0$ não intercepta o gráfico de f.

III. f é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio de f.

IV. A função f é periódica, com período igual a 2.

O número de afirmativas verdadeiras é

A) 1

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Nota: R é o conjunto dos números reais.

Assunto: Funções

I. **Falsa**, pois o conjunto imagem da função não contém nenhum número no intervalo]–2; 2[, conforme argumentação a seguir.

Inicialmente, note que x e f(x) possuem o mesmo sinal, qualquer que seja o número real x.

Para números reais positivos x, pode-se aplicar a desigualdade das médias:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Desse modo, a função não assume valores reais positivos menores do que 2.

Já para números reais negativos, tem-se:

$$\frac{-x+\frac{1}{-x}}{2} \geq \sqrt{-x\cdot\frac{1}{-x}} \Rightarrow \frac{-x-\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{-x-\frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow -x - \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2.$$

Desse modo, a função não assume valores reais negativos maiores do que –2.

II. **Verdadeira**, pois x + y = 0 é o mesmo que y = –x. Substituindo isso na equação funcional, tem-se uma equação do 2º grau que não apresenta raízes reais, conforme mostrado a seguir.

$$-x = x + \frac{1}{x} \Rightarrow -x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -1/2.$$

III. **Verdadeira**, pois

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} \Rightarrow f(-x) = -\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

IV. **Falsa**, pois se fosse verdade teria-se f(x + 2) = f(x) para todo número real x, o que não ocorre, já que f(1) = 2 e f(3) = 1,333…, por exemplo.

Logo, duas das afirmativas são verdadeiras.

Item: B